Chapitre 12
Proportionnalité

I. Proportionnalité

1) Tableau de proportionnalité

Définition n°1 :
Un tableau est un tableau de proportionnalité si on passe d'une ligne à l'autre en multipliant toujours par un même nombre.
Ce nombre est appelé coefficient de proportionnalité.

Exemples :

1)

Volume en L	10	20	30	40
Prix en euros	13	26	39	52

$\times 1{,}3$

Le prix payé pour un achat de carburant est proportionnel au nombre de litres mis dans le réservoir.

Ce tableau est un tableau de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité de la première ligne vers la seconde est 1,3. Il représente ici le prix du carburant au litre.

2)

Age en années	5	10
Taille en cm	100	130

La taille d'un enfant n'est pas proportionnelle à son âge.

Ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité : le coefficient multiplicateur de la première ligne vers la seconde est 20 dans une colonne et 13 dans l'autre.

2) Quatrième proportionnelle

Définition n°2 :
Lorsque dans deux colonnes d'un tableau de proportionnalité on connaît trois nombres, on peut calculer le quatrième, appelé quatrième proportionnelle.

Méthode n°1 : Calculer une quatrième proportionnelle en utilisant le coefficient de proportionnalité
Cinq barres de friandises coûtent 8 euros. Quel est le prix de sept barres de friandises ?

Nombre de barres	5	7
Prix en euros	8	?

(1) On construit un tableau

Le coefficient de proportionnalité est $\frac{8}{5} = 1{,}6$.

(2) On calcule le coefficient de proportionnalité

$7 \times 1{,}6 = 11{,}2$

(3) On calcule la quatrième proportionnelle

Sept barres de friandises coûtent 11,2 euros.

(4) On conclut

Méthode n°2 : Calculer une quatrième proportionnelle en additionnant ou en soustrayant deux « colonnes » du tableau

Pour peindre une surface de 6 m^2, il faut 3,6 kg de peinture et pour peindre une surface de 35 m^2, il en faut 21 kg. Combien faut-il de peinture pour peindre une surface de 41 m^2 ?

Aire en m^2	6	35	41
Masse en kg	3,6	21	?

(1) On construit un tableau

On remarque que $6+35=41$.

(2) On repère une addition (ou une soustraction) possible entre deux colonnes

$3{,}6+21=24{,}6$

(3) On calcule la quatrième proportionnelle

Pour peindre une surface de 41 m^2, il faut 24,6 kg de peinture.

(4) On conclut

Méthode n°3 : Calculer une quatrième proportionnelle en multipliant ou en divisant une « colonnes » par un nombre (non nul)

Si 4 citrons coûtent 7 euros, combien coûtent 12 citrons ?

Nombre de citrons	4	12
Prix en euros	7	?

(1) On construit un tableau

On remarque que $4\times3=12$.

(2) On repère une multiplication (ou une division) qui permet de passer d'une colonne à l'autre

$7\times3=21$

(3) On calcule la quatrième proportionnelle

12 citrons coûtent 21 euros.

(4) On conclut

Méthode n°4 : Convertir une durée en heures, minutes, secondes

Convertir 18750 s en heures, minutes, secondes

Durée en s	60	18752
Durée en min	1	312,53

(1) On converti en nombre décimal de minutes.

$60 \times 312 = 18720$
$18752 - 18720 = 32$
$18750 \text{ s} = 312 \text{ min } 32 \text{ s}$

(2) On converti en minutes, secondes.

Durée en min	60	312
Durée en h	1	5,2

(3) On converti les minutes en nombre décimal d'heures.

$60 \times 5 = 300$
$312 - 300 = 12$
$312 \text{ min} = 5 \text{ h } 12 \text{ min}$

(4) On converti en heures, minutes.

$18752 \text{ s} = 5 \text{ h } 12 \text{ min } 32 \text{ s}$

(5) On conclut.

II. Mouvement uniforme

Définition n°3 :

Un mouvement est dit uniforme lorsque la distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours.

Exemple :

Pendant un trajet, un routier note les durées et les distances parcourues :

Durée du trajet (en h)	1	1,5	2
Distance parcourue (en km)	80	120	160

$\times 80$

Le coefficient de proportionnalité est la distance parcourue en une heure. C'est la vitesse moyenne. Ici, la vitesse moyenne est de 80 km/h.

Lors d'un mouvement uniforme, la vitesse est constante.

III. Echelle

Définition n°4 :

Lorsque les longueurs d'une reproduction (carte, plan, dessin ...) sont proportionnelles aux longueurs réelles, on appelle échelle le coefficient de proportionnalité :

$$e = \frac{\text{longueur sur la reproduction}}{\text{longueur réelle}}$$

Les deux longueurs doivent être exprimées dans la même unité.

Remarque :

Une échelle est souvent représentée par une fraction dont le numérateur ou le dénominateur est égal à 1.

Exemple : Réduction ($e < 1$)
Sur une carte, 5 cm représentent 100 km donc 1 cm représente 20 km soit 20 000 m ou 2 000 000 cm.

Cette carte est donc à l'échelle $\frac{1}{2\,000\,000}$.

Exemple : Agrandissement ($e > 1$)
Un horloger examine le plan d'une montre à l'échelle 2,5 soit $\frac{2{,}5}{1}$. Cela signifie que 2,5 cm sur le plan représentent 1 cm en réalité. On peut aussi noter l'échelle $\times 2{,}5$.

IV. Proportion et pourcentage

1) Proportion

Définition n°5 :
Une proportion est représentée par une fraction.

Exemple :
Dans une classe de 20 élèves, il y a 11 filles. On dit que la proportion des filles dans cette classe est $\frac{11}{20}$.

Dans une classe de 40 élèves, il y a 22 filles. La proportion des filles dans cette classe est $\frac{22}{40}$.

Les fractions $\frac{11}{20}$ et $\frac{22}{40}$ sont égales donc il y a la même proportion de filles dans les deux classes.
Autrement dit, le nombre de filles dans une classe est proportionnel au nombre d'élèves.

2) Pourcentage

Définition n°6 :
Calculer un pourcentage, c'est écrire une proportion de dénominateur 100.

Exemple :
Dans une classe de 25 élèves, 7 portent des lunettes.
La proportion des porteurs de lunettes dans cette classe est $\frac{7}{25} = 0{,}28 = \frac{28}{100}$.

Le pourcentage de porteurs de lunettes est donc 28%.

Propriété n°1 :
Calculer un pourcentage, c'est aussi calculer une quatrième proportionnelle.

Exemple :
Parmi les 225 élèves de cinquième d'un collège, 36 font du latin.

Cinquièmes	225	100
Latinistes	36	

$\times \frac{36}{225}$

$100 \times \frac{36}{225} = \frac{3600}{225} = 16$ donc 16% des élèves de cinquième de ce collège font du latin.